

УДК 621.391:519.726

**Жураковський Б. Ю.**, докт. техн. наук, доц. (Тел.: +38044 249 29 10. E-mail: bogdan68@ukr.net)  
(Державний університет телекомунікацій, м Київ)

## МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ЧАСТОТИ $i$ -КРАТНИХ ПОМИЛОК В КОДОВИХ КОМБІНАЦІЯХ РІЗНОЇ ДОВЖИНИ ПРИ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

**Жураковський Б. Ю. Методика розрахунку частоти  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях різної довжини при передачі інформації.** В роботі запропонована методика розрахунку накопиченої частоти прийнятих з помилками кодових комбінацій, які вміщують не більше  $i$  помилок та частоти  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях різної довжини  $n$ . Наведено експериментальні криві, що характеризують закони розподілу помилок в телекомунікаційних каналах. Проведено розрахунки та наведено експериментальні дані розподілу  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях різної довжини. Зроблено розрахунки частоти похибки комбінації та частоти похибки символів.

**Ключові слова:** частість помилок, кратність помилок, кодова комбінація, ймовірність помилки, груповий характер розподілу.

**Жураковский Б. Ю. Методика расчета частоты  $i$ -кратных ошибок в кодовых комбинациях разной длины при передаче информации.** В работе предложена методика расчета накопленной частоты принятых с ошибками кодовых комбинаций, которые вмещают не больше  $i$  ошибок и частоты  $i$ -кратных ошибок в кодовых комбинациях разной длины  $n$ . Приведены экспериментальные кривые, которые характеризуют законы распределения ошибок в телекоммуникационных каналах. Проведены расчеты и приведены экспериментальные данные распределения  $i$ -кратных ошибок в кодовых комбинациях разной длины. Сделаны расчеты частоты ошибки комбинации и частоты ошибки символов.

**Ключевые слова:** частость ошибок, кратность ошибок, кодовая комбинация, вероятность ошибки, групповой характер распределения.

**Zhurakovs'kyu B. Yu. Methods of calculating the relative frequency of the  $i$ -fold errors in codewords of different lengths in the transmission of information.** The paper proposed a method of calculating the cumulative relative frequency received in error code combinations that can hold no more  $i$ -errors and relative frequency of the  $i$ -fold errors in different codewords of length  $n$ . Experimental curves, characterizing the distribution of errors in the telecommunication channels, are shown. The calculations and experimental data of distribution  $i$ -fold mistakes in code combinations of different length are given. Estimates of relative error combinations and relative error of the characters are made.

**Keywords:** frequentness of mistakes, frequency rate of mistakes, code combinations, probability of the mistake, the group nature distribution

**Вступ.** Ретельний аналіз розподілу статистичних характеристик послідовності помилок у реальних каналах зв'язку показав, що помилки є залежними і мають тенденцію до групування (пакування), тобто між ними є зв'язок – кореляція [1].

Більшу частину часу інформація на каналах зв'язку проходить без завад, а у деякі моменти часу виникають пакети помилок, в середині яких ймовірність помилки виявляється значно вищою середньої ймовірності помилок, яка знаходиться для досить великого відрізка часу передачі [2].

При груповому характері розподілу помилок один параметр – ймовірність помилки – не повністю характеризує канал, необхідні додаткові параметри, які відображають ступінь групування помилок у різного виду каналах [3].

**Знаходження ймовірності  $i$ -кратних помилок кодової комбінації.** При виборі коректуючих кодів для різних систем передачі дискретної інформації представляє інтерес знаходження ймовірності  $i$ -кратних помилок кодової комбінації. Такі розрахунки можливі, якщо відомі закони розподілу помилок, характерні для різних каналів зв'язку.

Розглянемо найбільш простий біноміальний закон розподілу помилок. При використанні цього закону передбачається, що помилки взаємно незалежні та ймовірність ураження

кожного символу в комбінації є величиною постійною. Якщо позначити ймовірність помилки через  $p$  а ймовірність безпомилкового його прийому через  $q=1-p$ , то ймовірність розподілу помилок при передачі кодової комбінації з  $n$  символів визначається з розкладання біному [4]

$$(p+q)^n = q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + p^n = \sum C_n^i p^i q^{n-i},$$

де  $i$  – кратність помилки в кодовій комбінації;

$C_n$  – біноміальний коефіцієнт, який характеризує число варіантів  $i$ -кратних помилок в комбінації;

$n$  – число символів в комбінації.

Кожний член  $C_n^i p^i q^{n-i}$  характеризує ймовірність появи  $i$ -кратної помилки в комбінації при заданому  $p$ . Так, наприклад, перший член  $q^n$  характеризує ймовірність прийому комбінації без помилок, другий член  $C_n^1 p^1 q^{n-1}$  – ймовірність прийому з одною помилкою і т.д.

Значення ймовірності помилки символу  $p$  при розрахунках кривих обирались таким чином, при якому виходить максимальне значення ймовірності  $i$ -кратної помилки кодової комбінації  $P_{i,n}$ . Визначалось воно з системи нерівностей [5]:

$$\begin{aligned} C^{i-1} p^{i-1} q^{n-i+1} &< C^i p^i q^{n-i} \\ C^i p^i q^{n-i} &> C^{i+1} p^{i+1} q^{n-i-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Підставивши в отриману нерівність (1) значення біноміальних коефіцієнтів, після перетворення отримаємо систему:

$$\left. \begin{aligned} q^2 &< \frac{n-i+1}{i} pq, \\ \frac{(n-i+1)(n-i)}{i(i+1)} p^2 &< \frac{n-i+1}{i} pq. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

З першої нерівності системи (2) маємо:

$$q < \frac{n-i+1}{i} p. \quad (3)$$

Підставивши в (3)  $q=1-p$ , отримуємо  $p > \frac{i}{n+1}$ .

Аналогічно з другої нерівності системи (2), отримаємо  $p < \frac{i+1}{n+1}$ . Об'єднуючи останні дві нерівності, отримуємо нерівність наступного вигляду [6]:

$$\frac{i}{n+1} < p < \frac{i+1}{n+1}. \quad (4)$$

Таким чином, величина  $p$ , при якій ймовірність має максимум, визначається як середнє арифметичне значення правої та лівої частин нерівності (4), тобто

$$p = \frac{2i+1}{2(n+1)}. \quad (5)$$

З отриманого виразу (5) бачимо, що ймовірність однократних помилок  $P_{1,n}$  при  $i = 1$  для коду довжиною  $n = 14$  буде перевищувати ймовірність подвійних та більш високих кратностей помилок, якщо ймовірність помилки символу  $p$  буде задовольняти умові [7]

$$p \leq \frac{2i+1}{2(n+1)} = \frac{3}{30} = 0,1.$$

Відповідно, для коду довжиною  $n=14$  криві ймовірностей  $i$ -кратних помилок монотонно зменшуються з збільшенням  $i$  при всіх значеннях  $p \geq 0,167$  криві мають максимуми.

Експериментальні криві (Табл. 1), що характеризують закони розподілу помилок в телекомунікаційних каналах, суттєво відрізняються від біноміального розподілу при  $p = \text{const}$ .

Визначимо частість помилки символу для коду довжиною  $n = 14$  як середнє значення по формулі  $p = \frac{\sum N_n}{N}$ , де  $\sum N_n$  – кількість прийнятих з помилками символів,  $N$  – загальне число переданих символів [8, 9].

**Розподіл  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях різної довжини** Табл. 1

Кількість комбінацій з числом спотворених символів	Довжина кодової комбінації		
	$n = 5$	$n = 14$	$n = 31$
1	8577	628	216
2	10932	2744	1453
3	12280	437	150
4	6415	1487	345
5	12880	1328	77
6	-	2437	179
7	-	2678	137
8	-	2203	201
9	-	2159	185
10-11	-	801	427
12-14	-	29	1321
15-19	-	-	3568
20-25	-	-	278
26-31	-	-	1
Загальна кількість спотворених кодових комбінацій	39440	16931	8537
Загальна кількість спотворених символів	99225	99225	99225
Всього передано комбінацій	51231374	18296920	8263125
Всього передано символів	256156870	256156870	256156870
Частість похибки комбінації	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$	$10,5 \cdot 10^{-4}$
Частість похибки символів	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$

На Рис. 1 наведені криві накопленої частоті прийнятих з помилками кодових комбінацій, які вміщують не більше  $i$  помилок.

При врахуванні помилок, які викликані ушкодженням каналу, частість поодиноких помилок знижується. На характері кривих розподілу помилок відобразиться також і метод модуляції. Перевищення кількості парних помилок, особливо подвійних, зумовлено системою ФРМ.

Частість помилок різної кратності в кодових комбінаціях характеризують криві, наведені на Рис. 2. На цих кривих видно, що максимальне значення частотей отримуємо при кратності помилки, яка дорівнює половині довжини коду. Таким чином, значна кількість помилок обумовлено ушкодженням каналу, коли ймовірність помилки символу досягає величини, що дорівнює  $p = 0,5$ .

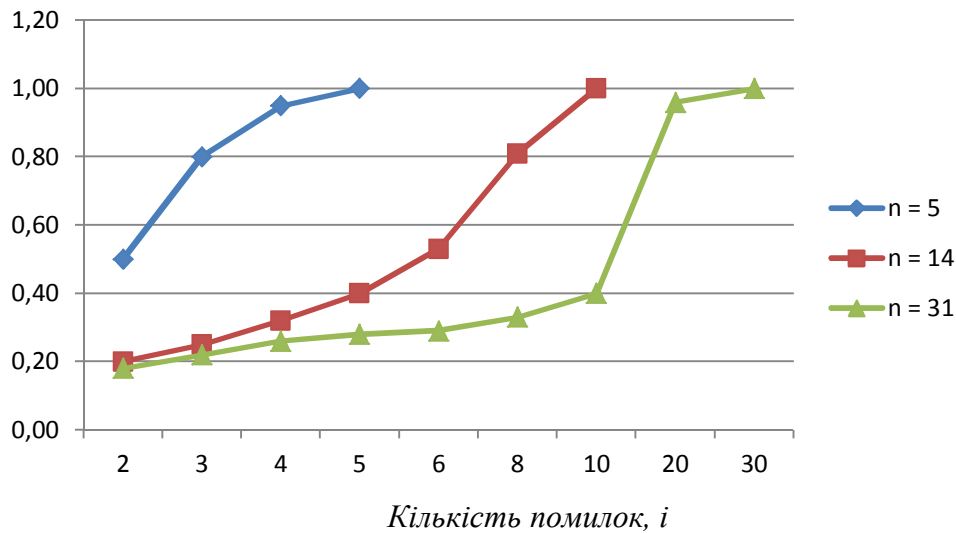


Рис. 1. Накопичена частість прийнятих з помилками кодових комбінацій, які вміщують не більше  $i$  помилок.

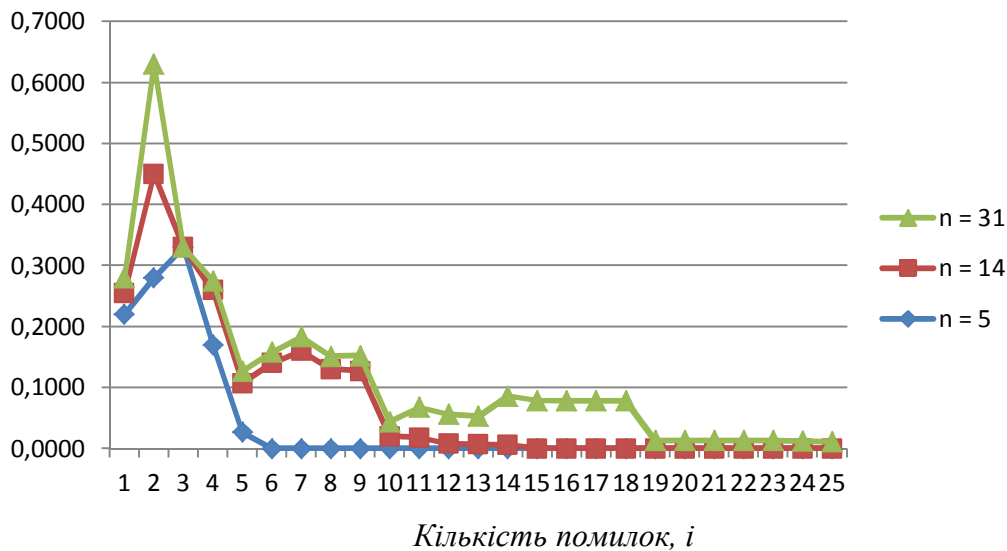


Рис. 2. Частість  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях різної довжини  $n$

Використовуючи експериментальні дані (Табл. 1) отримаємо

$$P_1 = 99225/25616870 = 3,9 \cdot 10^{-4}.$$

Розрахована для цього значення відносна величина ймовірності  $P_{1,n}i$ -кратних помилок буде суттєво відрізнятись від експериментальної. Так, наприклад, відносна величина ймовірності однократних помилок, обчислена для  $P_1 = 3,9 \cdot 10^{-4}$ , дорівнює 99,49%; ймовірність двократних помилок – 0,25 % і т.д.

Можливо дещо покращити результати теоретичних розрахунків, якщо величину ймовірності помилки символу визначити як середнє значення з даних вимірювань, взятих тільки за період часу, коли з'являться помилки. З Табл. 1 бачимо, що при довжині коду  $n = 14$  з помилками було прийнято 16931 комбінація. При цьому загальна кількість символів прийнятих з помилками, складає 99225. Відповідно, середня частість помилки символу

$$P_2 = 99225/16931 = 0,4186.$$

Отримана величина частоти помилки символу  $P_2$  менше відрізняється від експериментальної. Відповідно, ймовірність  $P_2$  більш точно характеризує стан каналу в періоди появи помилок. Максимум ймовірності  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях виходить при значенні  $i$ , що дорівнює математичному очікуванню:  $i = nP_2 = 14 \cdot 0,4186 = 5,86 \approx 6$ , що більш близько співпадає з експериментальними даними.

Однак і розглянута апроксимація недостатньо точно відображує закон розподілу помилок в реальних каналах зв'язку (порівняння кривої на Рис. 2 для  $p = 0,434$  з кривою на Рис. 1 для  $n=14$ ).

**Висновки.** Розроблено методику розрахунку накопиченої частоти прийнятих з помилками кодових комбінацій, які вміщують не більше  $i$  помилок та частоти  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях різної довжини  $n$ . Побудовані експериментальні криві, що характеризують закони розподілу помилок в телекомунікаційних каналах. Проведено розрахунки та наведено експериментальні дані розподілу  $i$ -кратних помилок в кодових комбінаціях різної довжини. Розраховано частоти похибки комбінації та похибки символів при різній довжині кодової комбінації.

### **Література**

1. Шульгин В. И. Основы теории передачи информации. Ч. I. Экономное кодирование: Учебное пособие / В. И. Шульгин. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2002. – 100 с.
2. Хохлов Г. И. Элементы теории корректирующих кодов / Г. И. Хохлов. – Москва : МИРЭА, 1980. – 136 с.
3. Зюко А. Г. Теория передачи сигналов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк. – Москва : Радио и связь, 1986. – 304 с.
4. Котов П. А. Повышение достоверности передачи цифровой информации / П. А. Котов. – Москва : Связь, 1966. – С.183.
5. Жураковський Б. Ю. Дослідження використання нових завадостійких кодів для каналів зі стиранням/ Б. Ю. Жураковський // Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій. – 2012. – Т.10, № 2. – С.93-96.
6. Березюк Н. Т. Кодирования информации / Н. Т. Березюк. – Харьков: «Вища школа», 1978. – 252 с.
7. Жураковський Б. Ю. Оцінювання ефективності завадостійких кодів для інформаційних каналів систем управління / Б. Ю. Жураковський // Зв'язок. – 2010. – №2. – С.41-43.
8. Полторак В. П. Полиномиальное кодирование информации в системах управления / В. П. Полторак, Ю. П. Жураковский, Б. Ю. Жураковский // Праці 5-ої Української конференції з автоматичного управління «Автоматика-98»: Київ, 13-16 травня 1998 р. – Ч.IV. – Київ: Видавництво НТУУ «КПІ», 1998. – С.270.
9. Luby M. LT Codes / M. Luby// InProc. of the 43<sup>rd</sup> Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). –2002. –P. 271-282.

Дата надходження в редакцію: 29.10.2014 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Конахович Г. Ф.