

УДК 621.391:519.726

Жураковський Б. Ю., докт. техн. наук, доц. (Тел.: +380 (44) 249 29 10. E-mail: bogdan68@ukr.net)
(Державний університет телекомунікацій, м Київ)

МЕТОД АПРОКСИМАЦІЇ КРИВИХ РОЗПОДІЛУ КОДОВИХ КОМБІНАЦІЙ З i -КРАТНИМИ ПОМИЛКАМИ

Жураковський Б. Ю. Метод апроксимації кривих розподілу кодових комбінацій з i -кратними помилками. В результаті апроксимації визначаються ймовірності помилок символів P_i та періоди часу, на протязі яких приймаються символи з вказаними ймовірностями помилок. Ці дані дозволять визначити ймовірності прийому кодових комбінацій з i -кратними помилками при використанні простих та коректуючих кодів. Розрахована кількість не знайдених помилок кодами різної довжини з різною кодовою відстанню. Наведені експериментальна і теоретична криві залежності відносної ймовірності i -кратних помилок в комбінації від кількості помилок. Розрахована ймовірність прийому кодової комбінації довжиною $n = 14$ з i -кратними помилками при різних значеннях p .

Ключові слова: метод апроксимації, крива розподілу, кодова комбінація, ймовірність помилок, відносна ймовірність, коректуючий код

Жураковский Б. Ю. Метод аппроксимации кривых распределения кодовых комбинаций с i -кратными ошибками. В результате аппроксимации определяются вероятности ошибок символов P_i и периоды времени, на протяжении которых принимаются символы с указанными вероятностями ошибок. Эти данные позволят определить вероятности приема кодовых комбинаций с i -кратными ошибками при использовании простых и корректирующих кодов. Рассчитано количество не найденных ошибок кодами разной длины с разным кодовым расстоянием. Приведены экспериментальная и теоретическая кривые зависимости относительной вероятности i -кратных ошибок в комбинации от количества ошибок. Рассчитана вероятность приема кодовой комбинации длиной $n = 14$ с i -кратными ошибками при различных значениях p .

Ключевые слова: метод аппроксимации, кривая распределения, кодовая комбинация, вероятность ошибок, относительная вероятность, корректирующий код

Вступ. Питання передачі дискретної інформації в автоматизованих та інформаційних системах і мережах у разі, коли неможливо або невигідно з економічної точки зору використовувати для підвищення достовірності повідомлень зворотний канал зв'язку, викликають зацікавленість у широкого кола спеціалістів в галузі автоматики, проводового та радіозв'язку. Цій темі присвячена велика кількість статей та монографій [1, 2, 3, 4]. Однак, більшість публікацій присвячена висвітленню інформаційних каналів, в яких у якості завадостійких використовуються двійкові коректуючі коди, що виправляють одиничні помилки. Це викликано, головним чином, простотою операцій у двійковій системі числення, які виконуються різними пристроями обчислювальної техніки при обробці, накопиченні та зберіганні інформації в автоматизованих та інформаційних системах та мережах. Але в реальних каналах передавання інформації, помилки мають властивість до групування [1].

При виборі коректуючих кодів для різних систем передачі дискретної інформації представляє інтерес знаходження ймовірності i -кратних помилок кодової комбінації. Такі розрахунки можливі, якщо відомі закони розподілу помилок, характерні для різних каналів зв'язку [2].

Спроможність циклічних кодів різної довжини знаходити помилки. При обробці результатів вимірювань виключаються дані, отримані при явному пошкодженні каналу передачі даних. На прийомі в цей момент приймаються комбінації, які складаються тільки з нулів або тільки з одиниць. При експериментальних дослідженнях ці помилки легко виявити, так як на прийомі прийняте повідомлення порівнюється з переданим. Їх можливо легко

виявити і за допомогою декодуючих пристроїв, якщо кодові комбінації, що передаються вміщують мінімум одиниць або нулів [3]. Зазвичай цій умові групові систематичні коректуючі коди не задовольняють, так як вони в якості дозволених мають нульову комбінацію і комбінацію, яка складається з одних одиниць. Відповідно, помилки, обумовлені пропажею каналів, ці коди не виявляють. Однак, якщо у вказаних кодах інвертувати перевірочні символи, тобто одиниці замінити нулями, а нулі – одиницями, то ці коди стануть спроможними виявляти помилки [4].

В Табл. 1 наведені експериментальні дані, що характеризують спроможність циклічних кодів різної довжини та з різною кодовою відстанню знаходити помилки.

Експериментальні характеристики спроможності циклічних кодів Табл. 1

Довжина коду, n	Кількість перевірочних символів, r	Кодова відстань, d	Передано кодових комбінацій	Кількість комбінацій, прийнятих з помилками	Частість прийому комбінацій з помилками	Кількість не знайдених помилок
511	18	5	$5 \cdot 10^6$	1475	$2,95 \cdot 10^{-4}$	0
255	16	5	$10 \cdot 10^6$	1758	$1,76 \cdot 10^{-4}$	0
127	14	5	$20 \cdot 10^6$	2118	$1,06 \cdot 10^{-4}$	0
127	7	3	$20 \cdot 10^6$	2118	$1,06 \cdot 10^{-4}$	10

З таблиці видно, що перші три варіанти коду Хемінга з відстанню $d = 5$ забезпечили знаходження всіх помилок, а останній код з $d = 3$ не знайшов помилки в 10 комбінаціях з 2118 [5].

На Рис.1 наведена експериментальна крива нормованої ймовірності i -кратних помилок в кодовій комбінації довжиною $n = 14$.

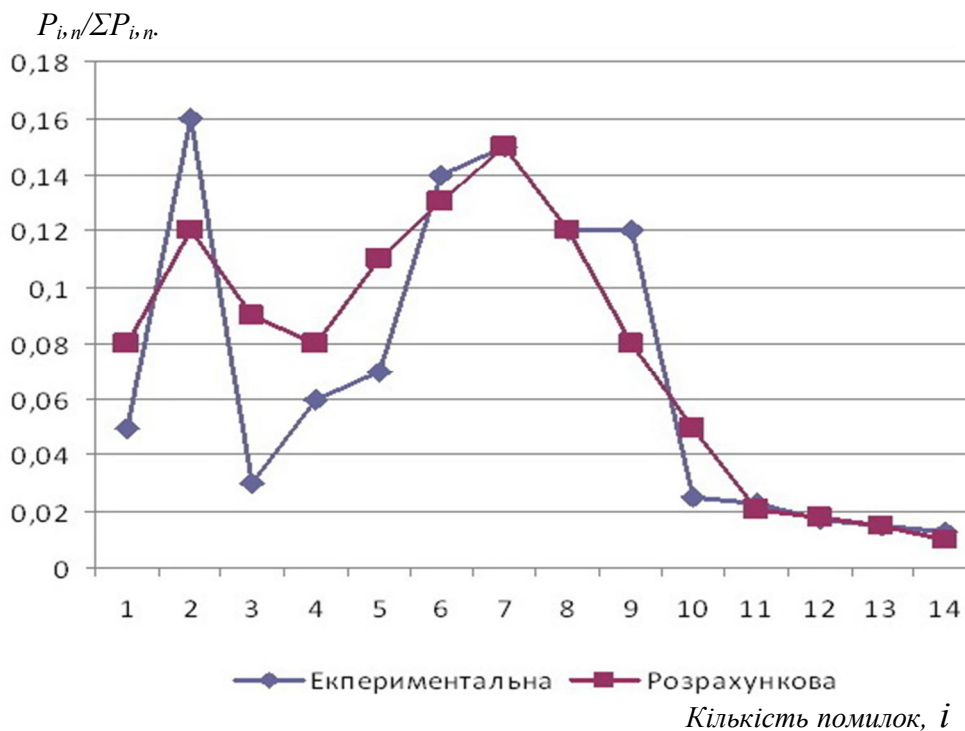


Рис.1. Експериментальна і теоретична криві відносної ймовірності i -кратних помилок в комбінації

Ймовірність помилки символу p є величина змінна. Відповідно, експериментальну криву можливо апроксимувати за допомогою деякої кількості кривих ймовірностей $P_{i,n}$, розрахованих для різних значень p .

Для простоти апроксимуємо розглянуту криву за допомогою ймовірностей $P_{i,n}$, розрахованих тільки для двох значень i . Характерними точками експериментальної кривої на Рис.1 є максимальні ординати a_1 і a_2 при значеннях i , рівних, відповідно, 2 та 7.

Відповідно, з урахуванням характеру кривих ймовірностей $P_{i,n}$, при біноміальному розподілі помилок найбільш точна апроксимація експериментальної кривої буде здійснена за допомогою двох складових $P_{i,n}$, які мають максимуми при $i = 2$ та 7 [6].

З Рис. 2 бачимо, що криві з максимумом при обраних значеннях i отримуються відповідно при наступних ймовірностях помилки символу: $p_1 = 0,167$ і $p_2 = 0,5$.

Складемо систему з двох рівнянь для значень $i = 2$ та $i = 7$ [7]:

$$\begin{cases} \delta_1 C_n^{i_1} p_1^{i_1} q_1^{n-i_1} + \delta_2 C_n^{i_1} p_2^{i_1} q_2^{n-i_1} = a_1 \\ \delta_1 C_n^{i_2} p_1^{i_2} q_1^{n-i_2} + \delta_2 C_n^{i_2} p_2^{i_2} q_2^{n-i_2} = a_2 \end{cases}, \quad (1)$$

де a_1 та a_2 – ординати апроксимуючих кривих;

δ_1 та δ_2 – частість ймовірностей i_1 - та i_2 -кратних помилок при ймовірностях помилок символів відповідно p_1 та p_2 .

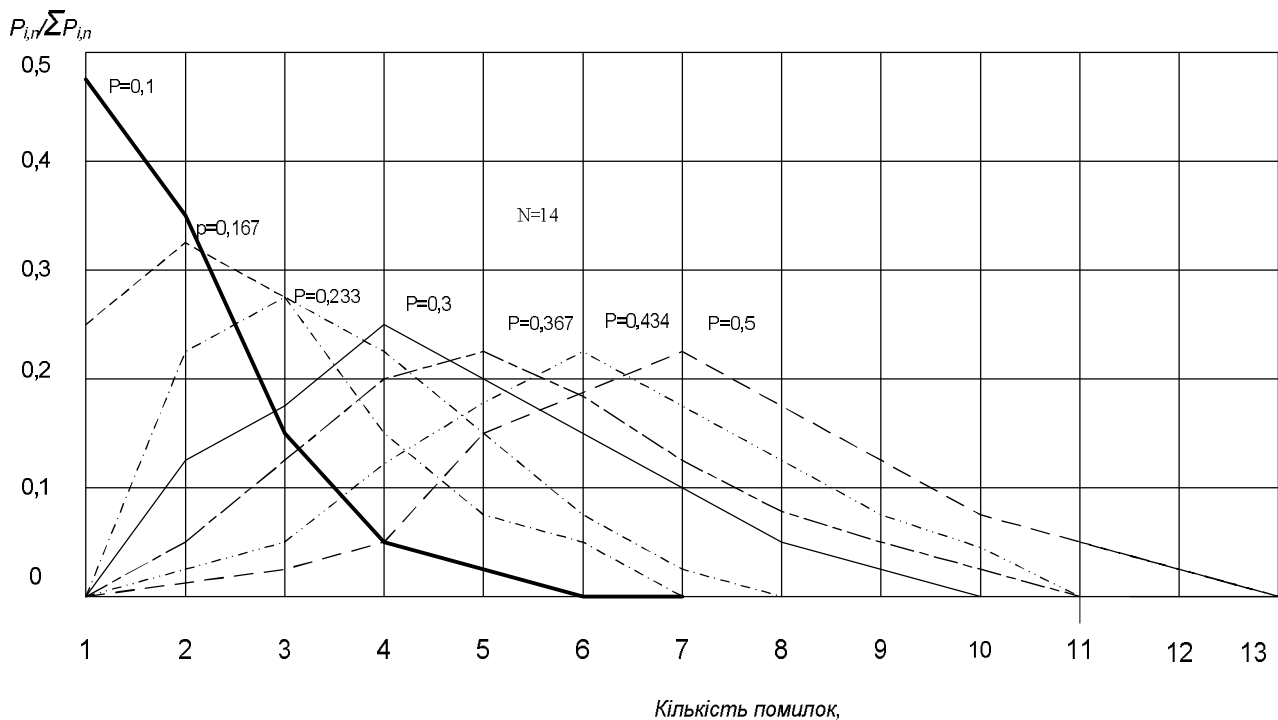


Рис. 2. Ймовірність прийому кодової комбінації довжиною $n = 14$ з i -кратними помилками при різних значеннях p .

В системі рівнянь (1) невідомими є величини δ_1 та δ_2 . Розв'яжемо цю систему відносно δ_1 та δ_2 та знайдемо, що

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{a_1 R_1 - a_2 R_2}{R_1 R_4 - R_2 R_3} \\ \delta_2 = \frac{a_2 R_1 - a_1 R_3}{R_1 R_4 - R_2 R_3} \end{cases}, \quad (2)$$

де $R_1 = C_n^{i_1} p_1^{i_1} q_1^{n-i_1}$, $R_2 = C_n^{i_2} p_2^{i_2} q_2^{n-i_2}$, $R_3 = C_n^{i_1} p_1^{i_2} q_1^{n-i_2}$, $R_4 = C_n^{i_2} p_2^{i_1} q_2^{n-i_1}$.

Значення цих коефіцієнтів відомі, оскільки ми обрали i_1, i_2, p_1 та p_2 . З Рис. 1 відома також ордината $a_2 = 0,158$. Ординату a_1 з метою більш точної апроксимації треба взяти трохи менше того значення, яке було отримано з експерименту.

Ця вимога пояснюється тим, що крива біноміального розподілу помилок при $p_1 = 0,167$ (Рис. 2) в точці $i = 2$ має більш пологі спади, чим експериментальна крива. Обираємо $a_1 = 0,13$. Підставляючи значення усіх величин у рівняннях (2), отримуємо $\delta_1 \approx 0,396$ та $\delta_2 \approx 0,715$.

Таким чином, ймовірність прийому кодової комбінації з i -кратними помилками визначається з рівняння:

$$P_{i,n} = \delta_1 C_n^i p_1^i q_1^{n-i} + \delta_2 C_n^i p_2^i q_2^{n-i}. \quad (3)$$

На Рис. 1 показана розрахована по формулі (3) крива, яка достатньо близько співпадає з експериментальною. Співпадіння цих кривих можливо покращити, якщо апроксимацію виконувати функціями, які характеризують інші закони розподілу ймовірностей помилок [6].

В Табл. 2 наведені результати розрахунку ймовірності i -кратних помилок в комбінації. Розрахунок виконаний по формулі (4) при $\delta_1 = 0,396$; $\delta_2 = 0,715$; $p_1 = 0,167$ та $p_2 = 0,5$ для коду довжиною $n = 14$.

Ймовірності i -кратних помилок в комбінації

Табл. 2

i	$P_{i,n}^1 = \delta_1 C_n^i p_1^i q_1^{n-i}$	$P_{i,n}^2 = \delta_2 C_n^i p_2^i q_2^{n-i}$	$P_{i,14} = P_{i,14}^1 + P_{i,14}^2$
1	8,6	0,06	8,66
2	11,2	0,4	11,6
3	8,0	1,54	9,54
4	5,0	4,36	9,36
5	2,0	8,72	10,72
6	0,6	13,1	13,7
7	0,1	15,00	15,10
8	0,02	13,1	13,12
9	-	8,72	8,72
10	-	4,36	4,36
11	-	1,54	1,54
12	-	0,4	0,4
13	-	0,06	0,06
14	-	-	-

Знайдені коефіцієнти δ_1 та δ_2 показують, що з загальної кількості помилково прийнятих комбінацій доля кодових комбінацій, яка дорівнює $\frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} = 0,36$, приймалася при ймовірності помилки символу в каналі $p_1 = 0,167$.

Інша доля, яка дорівнює $\frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = 0,64$, приймалася при ймовірності помилки символу в каналі $p_2 = 0,5$.

Висновок.

Таким чином, розглянутий метод дає можливість за допомогою складових біноміального розподілу приблизно апроксимувати криві розподілу кодових комбінацій з i -кратними помилками, що обумовлені груповим розподілом помилок символів в каналі.

В результаті апроксимації визначаються ймовірності помилок символів P_i та періоди часу, на протязі яких приймаються символи з вказаними ймовірностями помилок. Це дозволить визначити ймовірності прийому кодових комбінацій з i -кратними помилками при використанні простих та коректуючих кодів.

Література

1. Шульгин В. И. Основы теории передачи информации. Ч. I. Экономное кодирование: учебное пособие / Шульгин В. И – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьковский авиационный институт», 2002. – 100 с.
2. Хохлов Г. И. Элементы теории корректирующих кодов / Хохлов Г. И. – Москва : МИРЭА, 1980. – 136 с.
3. Теория передачи сигналов / А. Г.Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк. – Москва : Радио и связь, 1986. – 304 с.
4. Котов П. А.Повышение достоверности передачи цифровой информации / Котов П. А – Москва : Связь, 1966. – 183 с.
5. Жураковський Б. Ю. Дослідження використання нових завадостійких кодів для каналів зі стиранням / Б. Ю. Жураковський // Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій. – 2012. – Т.10. № 2 . – С.93-96.
6. Березюк Н. Т. Кодирования информации / Н. Т. Березюк. – Харків: «Вища школа», 1978. – 252 с.
6. Полторак В. П. Полиномиальное кодирование информации в системах управления / В. П. Полторак, Ю. П.Жураковський, Б. Ю. Жураковський // Праці 5-ої Української конференції з автоматичного управління «Автоматика-98»: Київ, 13-16 травня 1998 р. – Ч.IV. – Київ: Видавництво НТУУ «КПІ», 1998. – С. 270.
7. M. Luby. LT Codes / M. Luby // In Proc. of the 43-rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). – 2002. – P. 271-282.

Дата надходження в редакцію: 27.12.2014 р.

Рецензент: д.т.н., проф. В. І. Гостев